Leva Bilim Topluluğu

Leva Matematik Kampı

Hazır Bulunuşluk Sınavı

İkinci Gün

21 Temmuz 2024

Problem 10. Kerman Çuvaşlı Lisesinde 2023 öğrenci vardır. Her öğrenci istediği sayıda kulübe üye olabilmektedir. Kulüplerin ortalama üye sayısı ile öğrencilerin üye olduğu ortalama kulüp sayısı birbirine eşittir. Buna göre bu okulda toplamda kaç tane kulüp olabilir?

Problem 11. Bir x reel sayısı için $a \leq x$ koşulunu sağlayan en büyük a tam sayısını $\lfloor x \rfloor$ şeklinde gösterelim. Her $n > 2$ tam sayısı için

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha \in \mathbb{R}$ bulunabileceğini gösteriniz.

Problem 12. Bir gün Levent saatine bakıp 13.59 sayısını görünce hayretle diyor ki: Ne tesadüf! x doğal sayısının onluk tabandaki rakamları toplamı $s(x)$ olmak üzere,

$$a + 1 = s(b)$$
$$s(a) \equiv b \pmod{11}$$

sistemini sağlayan pozitif tam sayı ikililerinden biri de $(a, b) = (13, 59)$.

Sonra Levent bunun pek de şaşırtıcı bir durum olmadığına kanaat getiriyor, zira $a = 13$ iken bu sistemi sağlayan sonsuz çoklukta b pozitif tam sayısı bulunabileceğini fark ediyor.

a) Levent'in farkına vardığı önermeyi ispatlayınız.

b) Hangi a tam sayıları için bu sistemi sağlayan sonsuz çoklukta b pozitif tam sayısı bulunur?

Problem 13. Bir ABC üçgeninin kenarları üzerinde alınan $X \in [BC]$, $Y \in [AC]$, $Z \in [AB]$ noktalarının oluşturduğu $\triangle AYZ$, $\triangle BXZ$, $\triangle CXY$ ve $\triangle XYZ$ üçgenlerinin alanları eşittir. Buna göre X, Y, Z noktalarının bulundukları kenarların orta noktaları olduğunu gösteriniz.

Problem 14. $xyz = 8$ koşulunu sağlayan (x, y, z) pozitif gerçek sayı üçlüleri için

$$\frac{yz}{x^2(y+z)} + \frac{xz}{y^2(x+z)} + \frac{xy}{z^2(x+y)}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.

Leva Bilim Topluluğu

Leva Matematik Kampı

Hazır Bulunuşluk Sınavı

İkinci Gün

21 Temmuz 2024

Problem 15. Emre ile Başar'ın en sevdikleri meşgale olan *Devlerin Aşkı* oyunu, n belli bir pozitif tam sayı olmak üzere, Emre'nin en az biri sıfırdan farklı olan $n+1$ adet gerçek sayı seçmesiyle başlar. Başar, Emre'nin seçtiği sayıları n. dereceden bir polinomun katsayıları olarak kendi istediği şekilde yerleştirir. Ortaya çıkan polinomun kaç tane gerçel kökü varsa Emre o kadar puan kazanır.

a) $n = 2$ iken Emre en fazla kaç puan kazanmayı garantileyebilir?

b) $n = 3$ iken Emre en fazla kaç puan kazanmayı garantileyebilir?

Problem 16. Bir ABC üçgeninin diklik merkezine H, çevrel çember merkezine O adı verilmiştir. H'nin BC doğrusuna göre yansıması H', B'nin O noktasına göre yansıması B' ve C'nin O noktasına göre yansıması C' olsun. AB ile $H'B'$ doğruları X noktasında, AC ile $H'C'$ doğruları ise Y noktasında kesişmektedir. Buna göre $B'Y$, $C'X$ ve AO doğrularının aynı noktada kesiştiğini gösteriniz.

Problem 17. P tam sayı katsayılı bir polinom olmak üzere, $\{P(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin en az bir elemanını bölen asalların kümesine *P'nin asal kümesi* denir ve bu küme $Asal(P)$ şeklinde gösterilir. Her $q \in Asal(P)$ için $q \mid \underbrace{P(P(\cdots(P}_{m \text{ defa}}(s))$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $s \in S$ sayıları bulunmasını sağlayan, sonlu sayıda tam sayıdan oluşan bir S kümesi varsa P'ye *Levent polinomu* denir. d bir doğal sayı olmak üzere, derecesi d'den küçük olan her tam sayı katsayılı polinom bir Levent polinomudur. Buna göre d en çok kaç olabilir?

Problem 18. Levent; $1, 2, ..., n^2$ sayılarını $n \times n$ boyutlarındaki bir tablonun hücrelerine, sol üst kareden başlayıp satır boyunca sağa doğru ilerleyerek ve bulunduğu satır dolduğu zaman bir alt satırın en sol hücresine geçerek sırayla yerleştirmiştir. Sonra da aslında sayıları tabloya tam tersi sırada (şu anki x sayısının yerinde $n^2 - x$ yazacak şekilde) yazması gerektiğini fark etmiştir. Tüm sayıları silip yeniden yazmak istemeyen Levent, bunun yerine her bir hamlesinde tablodaki hücrelerin kesişmeyen iki alt kümesini seçecektir ve bu alt kümeler, tablo üzerinde birbirinin ötelenmiş halleri olacaktır. Ardından Levent, karşılık gelen hücrelerin içindeki sayıları birbiriyle değiştirerek hamlesini tamamlayacaktır.

Başka bir deyişle Levent, her hamlesinde bazı $\{(a_i, b_i)\}$ hücreleri ve s, t pozitif tam sayıları seçecektir ve her i için (a_i, b_i) hücresinin içindeki sayı ile $(a_i + s, b_i + t)$ hücresinin içinde yazan sayıyı birbiriyle değiştirecektir, fakat $(a_i + s, b_i + t) = (a_j, b_j)$ olmasını sağlayan hiçbir (i, j) ikilisinin bulunmaması koşuluyla.

m bir pozitif tam sayı olmak üzere Levent'in $2m$ hamlede tablodaki sayıların sırasını tersine çevirmesi mümkünse n en çok kaç olabilir?

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.