

İSTANBUL ATATÜRK FEN LİSESİ  
MATEMATİK OLİMPİYATI TAKIMI

1 . LEVA MATEMATİK YARIŞMASI

12 – 19 Nisan 2021

1. Her  $x, y$  gerçel sayı çifti için

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

eşitliğini sağlayan tüm  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarını belirleyiniz.

2. Çevrel çemberinin merkezi  $O$  noktası olan bir  $ABC$  üçgeninde  $[AB]$  kenarının uzunluğu,  $[AC]$  kenarının uzunluğuna eşittir.  $[BC]$  kenarının orta noktası  $N$  olmak üzere,  $N$ 'nin  $AC$  doğrusuna göre simetriğine  $M$  noktası diyelim.  $ABC$  üçgeni ile aynı düzlemde bulunan bir  $T$  noktası için  $ANBT$  bir dikdörtgen ise  $\angle BAC = 2\angle OMT$  olduğunu gösteriniz.

3. Emre'nin elinde  $m \geq 1$  adet özdeş tavla pulu bulunmaktadır. Emre,  $n \times n$  boyutlarındaki bir kareli zeminin bazı birim karelerine elindeki tavla pullarından istediği kadarını üst üste dizerek yerleştiriyor. Emre elindeki tüm pulları kareli zemine koyduktan sonra Başar, kenarları bu zeminin sınırlarına paralel olan herhangi bir dikdörtgenin köşelerini oluşturan dört birim kare seçiyor. Başar'ın seçtiği kareleri saat yönünde sırasıyla A, B, C ve D olarak adlandıralım. Başar, seçtiği karelerin üzerinde bulunan pulların konumlarını aşağıda tanımlanan hamlelerle değiştirebiliyor.

- Başar, A karesindeki pullardan birini alıp D karesine ve C karesindeki pullardan birini alıp B karesine koyarak bir hamlesini tamamlayabilir.
- Başar, D karesindeki pullardan birini alıp A karesine ve B karesindeki pullardan birini alıp C karesine koyarak bir hamlesini tamamlayabilir.

Başar, yukarıdaki iki çeşit hamleyi istediği kadar kullanarak Emre'nin kareli zeminde oluşturabileceği iki pul diziliminden birini diğerine dönüştürebiliyorsa bu iki dizilime **kardeş dizilim** adını verelim. Buna göre Emre, en fazla kaç farklı kardeş olmayan dizilim oluşturabilir?

4.  $na^2 + a = (n + 1)b^2 + b$  eşitliğini gerçekleyen her  $(a, b)$  tam sayı ikilisi için  $|a - b|$  sayısının bir tam kare olmasını sağlayan tüm  $n$  tam sayılarını belirleyiniz.